DEVOIR DE SYNTHESE N°2

EXERCICE N°1 : 10' 3 points

Répondre par **vrai** ou **faux** à chacune des affirmations suivantes, **en justifiant la réponse**.

1°) Soit f une fonction dérivable sur $[-1,1]=I$ dont la dérivée est continue sur I ,

si $f(-1)=-f(1)$ alors la valeur moyenne de f sur I est égale à $\int_1^{-1}\frac{t}{2}f'(t)dt$.

2°) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^n(\sin x)^{2n}dx=0$.

3°) L'espace est muni d'un repère orthonormé direct. Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|+(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2\ \|\vec{v}\|^2$

4°) Soit la fonction f définie sur $[1,2]$ par : $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$.

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé alors le volume du solide S obtenu par la rotation de $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses est 2 .

EXERCICE N°2 : 30' 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1, 0, -1)$, $B(1,3,5)$, $C(-7,2,2)$ et $H(-1,4,3)$.

1°) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{HB}\wedge\overrightarrow{HC}$.

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HBC) est $x-2y-2z+15=0$.

2°) a) Calculer l'aire du triangle HBC.

b) Montrer que le point H est le projeté orthogonal de A sur le plan (HBC).

c) Calculer alors le volume de tétraèdre $ABCH$.

d) En déduire $\left|\left(\overrightarrow{HB}\wedge\overrightarrow{HC}\right)\cdot\overrightarrow{HA}\right|$.

3°) On considère l'ensemble S des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que : $x^2+y^2+z^2-4y-2z+1=0$.

a) Montrer que S est une sphère et préciser son centre I et son rayon R.

b) Vérifier que I est le milieu du segment $[AH]$.

c) Déterminer la position relative de la sphère S et du plan (HBC).

4°) Soit J (0,0,1).

a) Vérifier que J appartient à S.

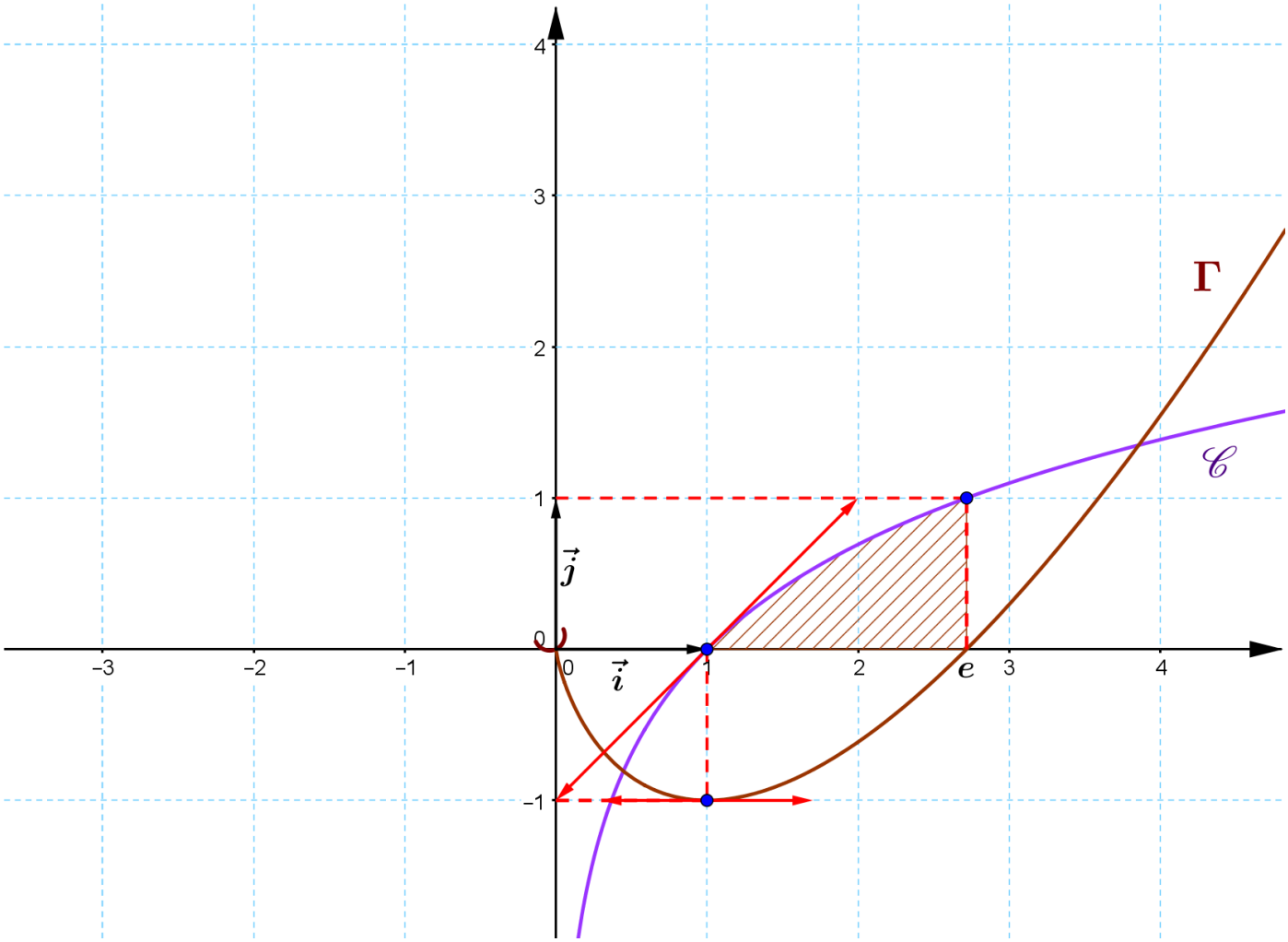
b) Calculer la distance du point I à la droite (AJ).

c) En déduire que la droite (AJ) est tangente à S.

EXERCICE N°3 :	30'	6 points	

Dans la figure ci-dessous, $\mathscr{C}$ et Γ sont les courbes représentatives, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, respectivement d'une fonction f définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et de sa fonction **primitive** F.

Chacune des courbe $\mathscr{C}$ et Γ, admet une branche parabolique, une de direction $(O,\vec{i})$ et l'autre de direction $(O,\vec{j})$.



À l'aide de ces données et par lecture graphique :

1°) a) Donner $f'(1)$, $F'(1)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$.

b) Vérifier que l'aire de la partie hachurée est égale à 1.

c) Calculer $\int_1^e f(x)\,F(x)\,dx$.

2°) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur IR.

(On note f^{-1} la fonction réciproque de f et $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$).

b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

c) Tracer dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}'$ et la tangente à $\mathscr{C}'$ au point d'abscisse 0.

d) Soit $I=\int_0^1\left(e-f^{-1}(x)\right)dx$. Interpréter graphiquement l'intégrale I puis calculer sa valeur exacte.

3°) On admet que $f(x)=a\ln(x)+b$ pour tout $x>0$ où a et b des constantes réelles.

a) Exprimer en fonction de a et b, $f(1)$ et $f(e)$.

b) En déduire que f est la fonction logarithme népérien.

4°) Pour tout $n \in IN^*$, on pose $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} F(t)dt$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $u_n \leq 0$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Calculer à l'aide d'une intégration par partie l'intégrale $v_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} t\ln(t)\,dt$.

d) Vérifier alors que pour tout $n \in IN^*$, $u_n = \frac{3+2\ln(n)}{4n^2} - \frac{3}{4}$, et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE N°4 : 40' 6 points

Soit la fonction f définie sur IR_+^* par $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.

1°) a) Montrer que le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)$ puis Etudier les variations de f et tracer C_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-x$	‖	$+$	0	$-$	

b) Utiliser le tableau de signe ci-contre pour préciser la position relative de C_f et la droite Δ d'équation : $y = x$.

2°) a) Soit g la restriction de f à $[1,+\infty[$; montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J qu'on précisera .

b) Tracer $C_{g^{-1}}$ dans le même repère que C_f.

3°) Soit la fonction F définie sur $[1,+\infty[$ par : $F(x) = \int_1^{f(x)} x - g^{-1}(t)\,dt$, et on désigne par H la primitive de la fonction g^{-1} sur J qui s'annule en 1.

a) Vérifier que $F(x) = x(f(x)-1) - H(f(x))$.

b) Montrer que F est dérivable sur $[1,+\infty[$ et que pour tout réel x de $[1,+\infty[$: $F'(x) = f(x) - 1$.

c) En déduire que pour tout réel x de $[1,+\infty[$: $F(x) = \int_1^x f(t) - 1\,dt$, puis calculer $F(e)$.

d) Calculer alors l'aire du domaine limité par $C_{g^{-1}}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations, $x = 1$ et $x = 1 + \frac{1}{e}$.

4°) Soit u la suite définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{f(u_n)} \end{cases}$, pour $n \geq 0$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 1$.

b) Montrer que u est décroissante, en déduire qu'elle est convergente puis calculer sa limite.

c) Soit V la suite définie sur IN par : $V_n = \sum_{k=0}^{n} \ln(f(u_k))$; établir que $V_n = 1 - \ln(u_{n+1})$ calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.